配合曲線的性質

解　萬　臣

一　前　言

二空間曲線點點對應 (point to point correspondence)，若其對應點上之切線 (tangents) 相同，主法線 (principal normals) 相同，次法線 (binormals) 相同時，此二曲線分別互爲同切線配合曲線 (mates with the same tangent)，同主法線配合曲線，同次法線配合曲線，配合曲線在曲線論中不僅重要且極興趣的一種特殊曲線，配合曲線曾經伯爾脫朗 (Bertrand)，奚爾 (Scheel)，塞考斯基 (Salkowski) 及烏茲 (Voss) 等，提出及研究，本文爲了廣泛討論起見，常把定義中「相同 (Same)」的條件改爲「平行 (parallel)」而討論之。

二　同切線的配合曲線

設二曲線

$$C: x^i = x^i (s) \qquad (i=1,2,3.\ \text{以下類此})$$

$$C_1: x_1{}^i = x_1{}^i (s_1)$$

爲在其對應點 P 及 P_1 上有同一切線，則曲線 C_1 之參數式可寫爲

$$x_1{}^i = x^i + a\alpha^i \qquad (2\sim1)$$

式中之 a ($\neq$o) 爲對應點 P 與 P_1 間之距離，α^i 爲曲線 C 在 P 點之切線的方向餘弦，(以下 α^i，β^i，γ^i 分別爲 P 點之切線，主法線及次法線的方向餘弦)

微分 (2~1) 式，得

$$\alpha_1{}^i \frac{ds_1}{ds} = \alpha^i + \frac{da}{ds}\alpha^i + ak\beta^i \qquad (2\sim2)$$

由假設 $\alpha_1{}^i = \pm\alpha^i{}_1$，在 (2~2) 式中 β^i 之係數 ak 必爲零，故 k=0，此即曲線 C 爲直線而曲線 C_1 亦爲直線且與 C_1 重合故有

〔性質 1〕 任一曲線不可能有同切線的配合曲線，(直線的配合曲線心重合)。

在包絡線的性質中很明顯的已說明此一事實，即任一族直線系，若有其包絡線 (envelope) 時，則僅有一條。不可能有二條包絡線同時以此族直線爲其對應點之切線。

下面不妨把此一配合曲線中的條件放寬爲在對應點有平行切線之二曲線，而討論其性質如下:

設 C_1 與 C 有平行切線時，則 C_1 之參數式可寫爲

$$x_1{}^i = x^i + a\alpha^i + b\beta^i + c\gamma^i \qquad (2\sim3)$$

微分上式並利用 Frenet 公式，得

$$\alpha_1{}^i \frac{ds_1}{ds} = \alpha^i + \frac{da}{ds}\alpha^i + ak\beta^i + \frac{db}{ds}\beta^i - b\,(k\alpha^i + \tau\gamma^i) + \frac{dc}{ds}\gamma^i + c\tau\beta^i$$

$$= (1 + \frac{da}{ds} - bk)\,\alpha^i + (ak + \frac{db}{as} + c\tau)\,\beta^i + (\frac{dc}{ds} - b\tau)\,\gamma^i \qquad (2\sim4)$$

因 C 與 C_1 之切線平行，即 $\alpha_1{}^i = \pm\alpha^i$，故 (2~4) 式中之 β^i 及 γ^i 的係數必爲零，即

$$ak + \frac{db}{as} + c\tau = 0, \qquad \frac{dc}{as} - b\tau = 0 \qquad (2\sim5)$$

由上式可知有平行切線之二曲線存在並且在特殊情形下，若 P_1 在 P 點曲線 C 之法平面 (normal plane) 上時，則 a=0，由 (2~5) 式可解得

$$b^2 + c^2 = \text{常數}$$

數此即

〔爲性 2〕 若曲線 C_1 之點 P_1 在另一曲線 C 之對應點 P 之法平面上且有平行之切線時，則 P_1 與 P 間之距離爲常數。

又因 $\alpha_1{}^i$ 及 α^i 各爲 C_1 及 C 之應點上切線的方向餘弦，由假設

$$\alpha^i{}_, = \pm\alpha$$

微分之得

$$k_1\beta_1{}^i\frac{ds_1}{ds} = \pm k\beta^i \qquad (2\sim6)$$

故又得一性質:

〔性質 3〕 若二曲線之對應點上之切線平行時，則其主法線亦平行，但反之則否。

蓋因若 $\beta_1{}^i = \pm\beta^i$

則微分校，得

$$-(k_1\alpha_1{}^i + \tau_1\gamma_1{}^i)\frac{bs_1}{ds} = -(k\alpha^i + \tau\gamma^i) \qquad (2\sim7)$$

而不能使 (2～7) 式中 $\alpha_1{}^i = \pm\alpha^i$ 成立之故

又從性質 3 推得

〔性質 4〕 若二曲線之對應點有平行之切線時，則其密切平面 (Osculating plane) 亦平行。

在 (2～6) 式中，因 $\beta_1{}^i$ 及 β^i 各爲 C_1 及 C 之主法線的方向餘弦，故

$$\frac{k}{k_1} = \pm\frac{ds_1}{ds}$$

又由 (2～7) 式知

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \pm\frac{ds_1}{ds}$$

亦成立，故有

$$\frac{k}{k_1} = \frac{\tau}{\tau_1} = \pm\frac{ds_1}{ds}$$

之關係，即

〔性質 5〕 若二曲線其對應點之切線平行時，則其曲率與撓率成比例。

三 同主法線的配合曲線

同主法線之配合曲線亦稱爲伯爾脫朗 (Bertrand) 曲線 (參看Graustein: Differnetial geometry 第 23 節) 設 C_1 與 C 爲同主法線的配合曲線，則 C_1 可表爲

$$x_1{}^i = x^i + a\beta^i \qquad (3\sim1)$$

此處 a ($\neq$o) 爲 C_1 與 C 對應點 P_1 與 P 間之距離，微分 (3～1) 式

$$\alpha_1{}^i\frac{ds_1}{ds} = \alpha^i + \frac{da}{ds}\beta^i - a(k\alpha^i + \tau\gamma^i)$$

$$= (1-ak)\alpha^i + \frac{da}{ds}\beta^i - a\tau\gamma^i \qquad (3\sim2)$$

因 $\beta_1{}^i = \pm\beta^i$,， (3～2) 式兩邊乘以 β^i 求和，利用 $\alpha_1{}^i\beta^i = \alpha_1{}^1\beta^1 + \alpha_1{}^2\beta^2 + \alpha_1{}^3\beta^3 = 0$, $\alpha^i\beta^i = 0$, $\gamma^i\beta^i = 0$ 及 $\beta^i\beta^i = 1$之關係，得

$$\frac{da}{ds} = 0,\ 或\ a = 常數 \qquad (3\sim3)$$

而 (3～2) 式可寫爲

$$\alpha_1{}^i \frac{ds_1}{ds} = (1-ak)\,\alpha^i - a\tau\gamma^i \qquad (3\sim4)$$

若 (3~4) 式中 $\tau=0$ 時，即 C 爲平面曲線，此時 $\alpha_1{}^i=\pm\alpha^i$

則有

$$k_1\beta_1{}^i \frac{ds_1}{ds} = \pm k\beta^i，\text{即}\quad \beta_1{}^i=\pm\beta^i$$

故 C 與 C_1 有同一主法線，且 (3~1) 式中之 a 可爲任意常數，由此得

〔性質 6〕 任一平面曲線有無限多同主法線的配合曲線。

此一性質可由平面曲線的漸伸線 (involute) 及漸屈線 (evolute) 之關係直接看出：設曲線 E 爲一平面曲線 C 之漸屈線，則 E 之漸伸線 $I_1, I_2, \cdots\cdots I_n, \cdots\cdots$ (包括 C) 均與原曲線 C 有共同主法線，故性質 6 很顯然。

再由 (3~3) 式，知

〔性質 7〕 任一對同主法線的配合曲線，其對應點間之距離爲常數。

若 (3~4) 式中之 $\tau\neq0$ 時，即 C 爲一空間曲線 (twisted curve) 時，微分 (3~4) 式，得

$$\alpha_1{}^i\frac{d^2s_1}{ds^2}+k_1\beta_1{}^i\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=(1-ak)k\beta^i+\alpha^i\frac{d}{ds}(1-ak)-\gamma^i\frac{d}{ds}(a\tau)-a\tau^2\beta^i \qquad (3\sim5)$$

由 (3~4) 式及 $\beta_1{}^i=\pm\beta^i$ 之關係，代入 (3~5) 式後整理之，得

$$\left[(1-ak)\frac{\frac{d^2s_1}{ds^2}}{\frac{ds_1}{ds}}-\frac{d}{ds}(1-ak)\right]\alpha^i+\left[\pm k_1\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2-(1-ak)k+a\tau^2\right]\beta^i$$

$$+\left[-a\tau\frac{\frac{d^2s_1}{as^2}}{\frac{ds_1}{ds}}+\frac{d}{ds}(a\tau)\right]\gamma^i=0 \qquad (3\sim6)$$

因行列式 $|\alpha^i, \beta^i, \gamma^i|\neq0$ 故 (3~6) 式中的係數均爲零，即

$$\left[(1-ak)\frac{\frac{d^2s_1}{ds^2}}{\frac{ds_1}{ds}}-\frac{d}{ds}(1-ak)\right]=0 \qquad (3\sim7)$$

$$\left[\pm k_1\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2-(1-ak)k+a\tau^2\right]=0 \qquad (3\sim8)$$

$$\left[-a\tau\frac{\frac{d^2s_1}{as^2}}{\frac{as_1}{as}}+\frac{d}{ds}(a\tau)\right]=0 \qquad (3\sim9)$$

聯立 (3~7) 式及 (3~9) 式，消去 $\frac{d^2s_1}{ds^2}\Big/\frac{ds_1}{ds}$，得

$$(1-ak)\frac{d}{ds}(a\tau)-(a\tau)\frac{d}{ds}(1-ak)=0$$

或

$$\frac{d}{ds}\frac{(1-ak)}{(a\tau)}=0$$

積分之，並令積分常數爲 $\mathrm{Cot}\,\theta$，得

$$ak+a\cot\theta\,\tau=1 \qquad (3-10)$$

上式中 k 及 τ 之係數均爲常數，今改寫 (3~10) 式爲

$$Pk+Q\tau=R \qquad (P,Q,R\ \text{均爲常數}) \quad (3\sim11)$$

此一結果即一空間曲線 C 若有另一曲線 C_1 為其同法線之配合曲線時，則 (3~11) 式成立，反之，若 (3~11) 式成立，則令

$$\frac{P}{R}=a, \qquad \frac{Q}{R}=a\cot\theta$$

此處 a 及 θ 均為常數，由是 (3~11) 式可寫為

$$ak+a\tau\cot\theta=1$$

或

$$\frac{(1-ak)}{\cos\theta}=\frac{a\tau}{\sin\theta} \tag{3~12}$$

再設 P_1 為曲線 C_1 上之一點而與曲線 C 之 P 點對應，P_1 可表為

$$x_1{}^i=x^i+a\beta^i \tag{3~13}$$

上式當參數 s 為定值時，則表 P_1 之坐標，式中之 a 取與 (3~12) 式中 a 相同，微分 (3~13) 式得 (3~4) 式並與 (3~12) 式比較之，消去 (1-ak) 得

$$\alpha_1{}^i\frac{ds_1}{ds}=(\cos\theta\,\alpha^i+\sin\theta\,\gamma^i)\,a\tau\cos\theta \tag{3~14}$$

因 $\alpha_1{}^i$,α^i 及 γ^i 均為方向餘弦，故有下列之關係

$$\alpha_1{}^i=\cos\theta\,\alpha^i+\sin\theta\,\gamma^i \tag{3~15}$$

微分 (3~15) 式，得

$$k_1\beta_1{}^i\frac{ds_1}{ds}=\cos\theta\,k\beta^i+\sin\theta\,\tau\beta^i$$

故 $\beta_1{}^i=\pm\beta^i$，而由 (3~13) 式知 C 與 C_1 為同主法線之配合曲線，綜合上述之結果，得一重要性質：

〔性質 8〕 若二空間曲線互為同主法線的配合曲線，則其充要條件為任一曲線的曲率及撓率適合 $Pk+Q\tau=R$ (P,Q,R 為常數) 之關係。

又將 (3~15) 式兩邊乘以 α^i 求和後，得

$$\alpha_1{}^i\alpha^i=\cos\theta$$

此即

〔性質 9〕 若二曲線互為同主法線的配合曲線時，則其對應點之切線之交角 θ 為常數。

其次討論對一曲線 C 是否同時有二個同法線的配合曲線，今假若再能找到另一組常數 a_1 及 θ_1 亦能適合 (3~10) 式，即

$$a_1k+a_1\cot\theta_1\,\tau=1 \tag{3~16}$$

則聯立 (3~10) 及 (3~16) 式，解得

$$k=\frac{a\cot\theta-a_1\cot\theta_1}{a\,a_1(\cot\theta-\cot\theta_1)} \qquad \tau=\frac{a_1-a}{a\,a_1(\cot\theta-\cot\theta_1)}$$

顯然上式為可能且 k. τ 亦為常數，故得

〔性質10〕 圓螺旋線 (Circular helix) 為惟一具有一條以上同主法線配合曲線的空間曲線 (因圓螺旋線之曲率及撓率為常數)

若 C 與 C_1 為一對同主法線的配合曲線，則 C_1 及 C 分別可寫為

$$x_1{}^i=x^i+a\beta^i\ ,\ x^i=x_1{}^i-a\beta_1{}^i \tag{3~17}$$

比較 (3~4) 與式 (3~15) 式，得

$$\cos\theta=(1-ak)\Big/\frac{ds_1}{ds},\ \sin\theta=(a\tau)\Big/\frac{ds_1}{ds}$$

因而

$$k=\left(1-\frac{ds_1}{ds}\cos\theta\right)\Big/a \tag{3~18}$$

又微分 (3~17) 之第二式，得

$$\alpha^i\frac{ds}{ds_1}=(1+ak_1)\alpha_1{}^i+a\tau_1\gamma_1{}^i$$

因 θ 為 C 與 C_1 對應點切線之交角，故仿 (3~18) 式，得 C_1 之曲率

$$k_1=-\left(1-\frac{ds}{ds_1}\cos\theta\right)/a$$

今設 T 及 T_1 分別為 C 及 C_1 上對應點 P 及 P_1 的曲率中心 (center of curvature)，則有

$PP_1=a$ (以 P 點之主法線為正向)

$$PT=\frac{1}{k}=a/\left(1-\frac{ds_1}{ds}\cos\theta\right),\quad P_1T_1=\frac{1}{k_1}=-a/\left(1-\frac{ds}{ds_1}\cos\theta\right)$$

$$TT_1=PP_1-PT+P_1T_1=\frac{a\sin^2 o}{\left(1-\frac{ds_1}{ds}\cos\theta\right)\left(1-\frac{ds}{ds_1}\cos\theta\right)}$$

則此四點之叉比 (cross ratio)，利用上列之關係

$$(PT_1,P_1T)=\frac{(P_1P)\ (TT_1)}{(P_1T_1)\ (TP)}=\frac{(PP_1)\ (TT_1)}{(P_1T_1)\ (PT)}$$

$$=\sin^2\theta=\text{常數}$$

〔性質11〕 設 P,P_1 各為一對同主法線配合曲線 C 及 C_1 上的對應點， T, T_1 為各此二點之曲率中心，則叉比 (PT_1,P_1T) 為常數。

四　同次法線的配合曲線

設曲線 C 與曲線 C_1 有同一次法線，則 C_1 之參數式可寫為

$$x_1{}^i=x^i+a\gamma^i \qquad (4\sim1)$$

微分之，得

$$\alpha_1{}^i\frac{ds_1}{ds}=\alpha^i+\frac{da}{ds}\gamma^i+a\tau\beta^i \qquad (4\sim2)$$

(4~2) 式乘以 γ^i 後求和並利用 $\alpha_1{}^i\gamma^i=\beta^i\gamma^i=\alpha^i\gamma^i=0$ 及 $\gamma^i\gamma^i=1$ 之關係而得

$$\frac{da}{ds}=0,\qquad a=\text{常數}$$

故有

〔性質12〕 二曲線若互為同次法線之配合曲線，則其對應點間之距離為常數。

又因此二曲線對應點之次法線平行，即 $\gamma_1{}^i=\pm\gamma^i$，微分後得

$$\tau_1\beta_1{}^i\frac{ds_1}{ds}=\pm\tau\beta^i$$

故由 (4~2) 式知 $a\tau=0$，但 $a\neq o$，必有 $\tau=0$，故

〔性質13〕 互為同次法線之配合曲線必為平面曲線。

因任一平面曲線 C 均有同次法線的配合曲線，今以 C 為準線 (directrix) 及 C 之次法線為母線 (generator) 所成之柱面，由平行 C 之平面與柱面之截口所成之曲線 (Congruent curves) 皆為同次法線之配合曲線，故

〔性質14〕 任一柱面以垂直其母線之諸平面所截成的諸曲線均為同次法線之配合曲線。

如同第二節中所討論，今二曲線的同一次法線改為平行次法線而討論，由 (4~3) 式知若二曲線之次法線平行，則其主法線及切線亦隨之平行。

今設 k 及 τ_1 分別為曲線 C 的曲率及曲線 C_1 之撓率，一動點 P_2 分 C 與 C_1 對應點間之聯線 PP_1 成定比 m : n 則 P_2 點之軌跡 $x_2{}^i=x_2{}^i(s_2)$ 之參數式可寫為。

$$x_2{}^i=\frac{m\ x_1{}^i+nx^i}{m+n}$$

微分之得

$$\frac{dx_2{}^i}{ds_2}=\frac{m\alpha_1{}^i\frac{ds_1}{ds_2}+n\alpha^i\frac{ds}{ds_2}}{m+n} \tag{4~4}$$

若 C 與 C_1 之次法線平行，則其切線亦平行，即 $\alpha_1{}^i=\pm\alpha^i$ (取正號) 故 (4~4) 式可寫為

$$\alpha_2^i=\frac{m\frac{ds_1}{ds_2}+n\frac{ds}{ds_2}}{m+n}\alpha^i \tag{4~5}$$

上式中之 $\alpha_2{}^i$ 及 α^i 各為 C_2 及 C 在 P_2 及 P 之切線的方向餘弦，故 C, C_1, C_2 之弧長元素 ds, ds_1, ds_2 間之關係

$$ds_2=\frac{mds_1+nds}{m+n} \tag{4~6}$$

微分 (4~5) 式，得

$$k_2\beta_2^i=k\beta^i\frac{m+n}{m\frac{ds_1}{ds}+n}$$

故

$$k_2=\pm\frac{m+n}{m\frac{ds_1}{ds}+n}k\ (k=\text{常數}) \tag{4~7}$$

又 (4~5) 式可寫為

$$\frac{dx_2{}^i}{ds_2}=\alpha_1{}^i=\frac{dx_1{}^i}{as_1} \tag{4~8}$$

微分之，得

$$\frac{d^2x_2{}^i}{ds_2{}^2}=\frac{d^2x_1{}^i}{ds_1{}^2}\ \frac{ds_1}{ds_2}=\frac{d^2x_1{}^i}{ds_1{}^2}\ \frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}} \tag{4~9}$$

或

$$k_2=\pm\frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}}k_1 \tag{4~10}$$

再微分 (4~9) 式，得

$$\frac{d^3x_2{}^i}{ds_2{}^3}=\frac{d^3x_1{}^i}{ds_1{}^3}\left(\frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}}\right)^2-\frac{(m+n)^2\ n\ \frac{d^2s}{ds_1{}^2}}{(m+n\frac{ds}{ds_1})^3}\ \frac{d^2x_1{}^i}{ds_1{}^2} \tag{4~11}$$

利用 (4~8) ~ (4~11) 式，則 C_2 之撓率為

$$\tau_2=\left(\frac{1}{k_2}\right)^2\left|\frac{dx_2{}^i}{ds_2},\ \frac{d^2x_2{}^i}{ds_2{}^2},\ \frac{d^3x_2{}^i}{ds_2{}^3}\right|$$

$$=\left[\frac{m+n\frac{ds}{ds_1}}{(m+nk_1)}\right]^2\left|\frac{dx_1{}^i}{ds_1},\ \frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}}\ \frac{d^2x_1{}^i}{ds_1{}^2},\ \left(\frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}}\right)^2\frac{d^3x_1{}^i}{ds_1{}^3}-\frac{(m+n)^2n\frac{d^2s}{ds_1{}^2}}{(m+n\frac{ds}{ds_1})^3}\ \frac{d^2x_1{}^i}{ds_1{}^2}\right|$$

$$=\frac{m+n}{(m+n\frac{ds}{ds_1})\ k_1{}^2}\left|\frac{dx_1{}^i}{ds_1},\ \frac{d^2x_1{}^i}{ds_1{}^2},\ \frac{d^3x_1{}^i}{ds_1{}^3}\right|$$

$$=\frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}}\tau_1\quad(\tau_1=\text{常數}) \tag{4~12}$$

今由 (4~7) 式及 (4~12) 式可求得

$$\left(\frac{\pm n}{(m+n)\,k}\right)k_2+\left(\frac{m}{(m+n)\tau_1}\right)\tau_2=\left(\frac{\pm n}{(m+n)\,k}\right)\left(\frac{\pm(m+n)}{m\frac{ds_1}{ds}+n}\right)k+\left(\frac{m}{(m+n)\tau_1}\right)\left(\frac{m+n}{m+n\frac{ds}{ds_1}}\right)\tau=1$$

在上式中 k_2 及 τ_2 之係數均爲常數，故由性質 8，得

〔性質15〕 二曲線其對應點之次法線平行且一曲率及他一曲線之撓率均爲常數，則分其對應點聯線成定比之內分點之軌跡爲一同主法線之配合曲線。

五 結 論

綜合上述各種配合曲線之討論，如果廣義的說同切線之配合曲線存在時，則此曲線必爲直線且其配合曲線與其重合；同次法線之配合曲線必爲平面曲線且其配合曲線必在以此平面曲線爲準線且母線垂直此平面之柱面上；同主法線之配合曲線爲一空間曲線且其配合曲線亦然，故可分別稱其爲一度的，二度的，三度的性質。

在第二、四節中討論之具有平行切線及平行次法線之二曲線，其實任二曲線若有平行切線時，則其主法線及次法線亦隨之平行，同樣的，若二曲線有平行之次法線時則其切線及主法線亦平行，故關于此兩方面所討論之二曲線性質彼此通有的。

漸屈線及漸伸線即把配合曲線之定義修改爲一曲線之切線爲他曲線法線所產生之特殊曲線，仿此若能討論研究一曲線之次法線爲他曲線之主法線或一曲線次法線平行他曲線之切線等，可發現曲線間更多的性質。

參 攷 書 籍

1. 正中書局編審委員會: 微分幾何學
2. D. J. Struik: Lectures on Classical Differential Geometry.
3. L. P. Eisenhart: An Introduction to Differential Geometry with use the Tensor Calculus.
4. W.C. Groustain: Differential Geometry.

PROPERTIES OF MATES

Hsieh Wan-chen

By mates with the same tangent (respectively principal normal, binormal), we mean that two space curves are point to point correspondence with the same tangent (respectively Principal normal binormal). Important properties of mates have been investigated and discussed by mathematicians such as Bertrand, Scheel, Salkowski and Voss. This paper tries to discuss some properties of mates in the sense stated above and generalize this idea from the word "Same" to "Parallel."